Ekstremumi fja više promjenljivih

~~Neop~~ Uslovi ekstremuma

Neka je $u=f(x)$, $x=(x_1,x_2,..,x_n)$ fja definisana na nekom $D\subseteq R^n$.
Kažemo da fja f u unutrašnjoj tački ~~D~~ $x^0=(x_1^0,x_2^0,..,x_n^0)\in D$ ima lokalni minimum (maksimum) ako postoji okolina $U(x^0)$ tačke x^0 takva da $f(x^0)\le f(x)$ $\left(f(x^0)\ge f(x)\right)$ $\forall x\in U(x^0)$ (1)

Minimum (maximum) fje f u tački x^0 se naziva strogim ako važi znak stroge nejednakosti.

Teorema 1. (potrebni (neophodni) uslovi ekstremuma)
Ako diferencijabilna fja $u=f(x)$ ima u tački x^0 lokalni ekstremum, to u toj tački važe jednakosti:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}=0,\ \dots,\ \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}=0, \qquad (2)$$

tj

$$df(x^0)=0.$$

Tačka $X\in D$ u kojoj važe jednakosti (2) se nazivaju stacionarnim tačkama. Uslovi (2) su neophodni, ali ne i dovoljni da bi u x^0 postojao ekstremum fje f. Na primjer za fju $u=x^4y^3$ tačka $(0,0)$ je stacionarna tačka, ali u toj tački fja nema ekstremuma, jer u njenoj okolini je $u(x,y)-u(0,0)=x^4y^3$ uzima i pozitivne i negativne vrijednosti.

Neka fja $u=f(x)$ ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda. Tu fju predstavimo u okolini tačke x^0 ~~po Teylorovoj~~ pomoću formule

$$f(x)-f(x^0)=df(x^0)+\frac{1}{2!}d^2f(x^0+\theta\Delta x) \qquad (3)$$

$\Delta x=x-x^0$, $0<\theta<1$.

Teorema 2 (dovoljni uslovi ekstremuma).
Neka je x^0 - stacionarna tačka dvaput neprekidno diferencijabilne fje f. Ako je $d^2f(x^0)>0$ $\left(d^2f(x^0)<0\right)$ to u x^0 fja f ima strogi lokalni minimum (maximum).

Dokaz. Pošto su u stacionarnoj tački ispunjene jednakosti (2) $\Rightarrow$ ~~po formuli (3)~~ to Tejlorova formula (3) ima oblik

$$f(x)-f(x^0)=\frac{1}{2}d^2f(x^0+\theta\Delta x) \quad (4)$$

Zbog neprekidnosti drugih parcijalnih izvoda f-je f postoji okolina tačke x^0 u kojoj diferencijal $d^2f(x)$ ima isti ~~znak~~ kao i diferencijal $d^2f(x^0)$. Prema tome ako je $d^2f(x^0)>0$ ($d^2f(x^0)<0$) to u dovoljno maloj okolini će biti i $d^2f(x^0+\theta\Delta x)>0$ ($d^2f(x^0+\theta\Delta x)<0$). Slijedi iz (4) u toj okolini je i $f(x)-f(x^0)>0$ ($f(x)-f(x^0)<0$) tj. u x^0 f-ja ima lokalni minimum (maximum) ▲

Znači, uslovi

$$1)\ df(x^0)=0$$
$$2)\ d^2f(x^0)>0 \quad (d^2f(x^0)<0) \qquad (5)$$

su dovoljni uslovi za postojanje lokalnog min (max) za dvaput nepr.-dif f-ju f u x^0.

Koristeći Hesenu matricu, diferencijal $d^2f(x^0)$ predstavljamo kao $d^2f(x^0)=(dx)^T H\,dx$, $(dx)^T=(dx_1,dx_2,\dots,dx_n)$.

~~Odavde slijedi~~

Uvedimo pojam pozitivno (negativno) definitne matrice.

Definicija. Simetrična matrica $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ je pozitivno definitna (negativno definitna) ako važi da je $a_{11}>0$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}>0,\dots|A|>0$

$\cancel{a_1<0}$

(Silvestrovo pravilo) $\left(a_{11}<0,\ |\quad|>0,\ |\quad|<0,\dots,(-1)^n|A|>0\right)$

Odavde slijedi da je $d^2f(x^0)>0$ ($d^2f(x^0)<0$) ako i samo ako je Heseova matrica pozitivno definitna (negativno) definitna.

Po Silvestrovom pravilu matrica H je pozitivno definitna ako i samo ako je

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_1}>0 \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2\partial x_2}\end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_3\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_3\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_3\partial x_3}\end{vmatrix}>0$$

$$\dots\ \det H|_{x=x^0}>0$$

Negativno definitna ako i samo ako je

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_1} < 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix} > 0, \quad \left| \quad \right| < 0, \ldots, (-1)^n \det H\Big|_{x=x^0} > 0$$

Znači dovoljni uslovi lokalnog ~~ekstremuma~~ minimuma (maksimuma) za dvaput NDF f u x^0 su

1) $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} = 0$ 1(6)

2) Hesseova matrica H je pozitivno (negativno) definitna.

Neka je $z = f(x,y)$ dvaput NDF-ja u okolini $M_0 = (x_0, y_0)$. Tada uslovi 1) $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0$

2) matrica $H = \begin{bmatrix} f''_{x^2}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{y^2}(M_0) \end{bmatrix}$ pozitivno (negativno) definitna.

garantuju postojanje u M_0 strogog lokalnog min (max) f-je $f(x,y)$.
Drugim riječima dovoljni uslovi strogog lokalnog min (~~max~~) za f-ju $f(x,y)$ koja ima neprekidne izvode drugog reda u M_0 su

1) $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$

2) $f''_{xx}(M_0) > 0, \ f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0) - f''^2_{xy}(M_0) > 0$,

a dovoljni uslovi strogog lokalnog max su

1) $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$

2) $f''_{xx}(M_0) < 0, \ f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0) - f''^2_{xy}(M_0) > 0$.

Slično za f-ju 3 promjenljive.

Teorema 3 Ako u stacionarnoj tački x^0 diferencijal drugog reda $d^2 f(x^0) = (dx)^T H \, dx$ nije definisan znači to u x^0 lokalni ekstremum ne postoji.

Na primjer za f-ju $z = f(x,y)$ dovoljan uslov ne postojanja ekstremuma u M_0 je

$$f''_{x^2}(M_0) f''_{y^2}(M_0) - f''^2_{xy}(M_0) < 0.$$

Primjer Ispitati ekstremume f-je $z = 3xy - x^3 - y^3$

Rješenje $z'_x = 3y - 3x^2 \quad z'_y = 3x - 3y^2$

$$\left.\begin{array}{l} z'_x = 3y - 3x^2 = 0 \\ z'_y = 3x - 3y^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y = x^2 \\ 3x - 3x^4 = 0 \Rightarrow x(1 - x^3) = 0 \end{array}$$

$M_1 = (0,0)$ $M_2 = (1,1)$ stacionarne tačke. $\quad x_1 = 0 \quad y_1 = 0$, $\quad x_2 = 1 \quad y_2 = 1$

Hesova matrica za naš sistem je

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} z''_{x^2} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{bmatrix}$$

$H(M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\det H(M_1) = -9 < 0$ po teoremi 3 $\Rightarrow$ nema ekstrema u $M_1 = (0,0)$.

U $M_2 = (1,1)$

$$H(M_2) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow -6 < 0, \det \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = 27 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $H(M_2)$ je negativno definitna $\Rightarrow$ u $M_2 = (1,1)$ f-ja ima lokalni maximum

Neophodni uslovi ekstremuma implicitnih f-ja

$z = f(x,y)$ zadate jednačinom $F(x,y,z) = 0$.

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = 0, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = 0$$

ili $F'_x(x,y,z) = 0$, $F'_y(x,y,z) = 0$ i naravno $F(x,y,z) = 0$

Znači stacionarne tačke dobijamo iz sistema

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z) = 0 \\ F'_y(x,y,z) = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Pitanje karaktera ~~ta~~ ekstremuma implicitno zadatih f-ja se rješava kao i kod eksplicitnih f-ja.

Ako u stacionarnoj tački x^0 drugi diferencijal ne zadovoljava Silvesterov kriterijum tada postojanje ekstremuma u x^0 ostaje otvoreno. Tada su nam potrebna dodatna ispitivanja.

Apsolutni ekstremum

Neka je funkcija $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ definisana i neprekidna na zatvorenoj ograničenoj oblasti D s granicom Γ i diferencijabilna u svim unutrašnjim tačkama te oblasti. Po Vajerštrasovoj teoremi postoje tačke X' i X'' u kojima f-ja ~~ima~~ f dostiže ~~ima~~ najveću i najmanju vrijednost (apsolutni ekstremum) tj.

$$f(X') = \max_{X\in D} f(X), \quad f(X'') = \min_{X\in D} f(X)$$

Tačke X' i X'' treba tražiti među stacionarnim tačkama f-je f unutar oblasti D ili među tačkama sa granice Γ. Upoređujući najmanje i najveće vrijednosti f-je f u stacionarnim tačkama s najvećim i najmanjim vrijednostima sa granice Γ traži se ~~taa~~ max i min f-je f u oblasti $\bar{D}$.

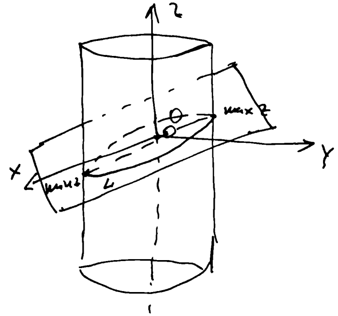
Uslovni ekstremum

Pojam uslovnog ekstremuma.

Razmotrimo sljedeći zadatak:

Treba naći ekstremum f-je $z=ax+by$ pri uslovu da su x i y povezani relacijom $x^2+y^2=R^2$.

Geometrijski to znači da na liniji presjeka ravni $z=ax+by$ i cilindra $x^2+y^2=R^2$ treba naći maksimalnu i minimalnu vrijednost aplikate z. Presjek je elipsa L.



Iz jednačine $x^2+y^2=R^2$ nalazimo $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$, $|x|\le R$. ~~Pa~~ Uvrstimo nađeno u jednačinu ravni imamo $z=ax\pm b\sqrt{R^2-x^2}$, $|x|\le R$. Tražimo ekstremum f-je $z=ax+by$ pri uslovu $x^2+y^2=R^2$ - svelo se na traženje ekstremuma f-je $z=ax\pm b\sqrt{R^2-x^2}$ jedne promjenljive x na intervalu $[-R,R]$, koji možemo ispitati poznatim metodama. Po Vajerštrasovoj teoremi ekstremumi ove f-je postoje.

Naš problem je specijalni slučaj opštijeg zadatka.
Razmatramo fju $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Tražimo ekstremume ove fje pri uslovu da $x_1, x_2, \dots x_n$ su ograničeni uslovima:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad (m < n)$$

(1) su uslovne veze ili uslovi.

Govorićemo da tačka $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ koja zadovoljava jednačine (1) je tačka lokalnog uslovnog max (min) ako postoji okolina $\bar{U}(x^0)$ tačke x^0 takva da $\forall x \in \bar{U}(x^0)$ važi da je

$$f(x) \leq f(x^0) \quad (f(x) \geq f(x^0)).$$

<u>Metod Lagranžovih množitelja</u>

Neka x^0 zadovoljava uslove (1). Pretpostavimo da je u toj tački rang Jakobijeve matrice $\left[\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}\right]$ jednak m. Možemo smatrati da je minor m-tog reda

$$\left|\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

Tada uzimamo pomoćnu fju

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = L(x, \lambda) =$$
$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m F_m(x_1, \dots, x_n) =$$
$$= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x) \quad (3)$$

gdje je $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ neki brojevi.

$L(x, \lambda)$ – Lagranžova fja, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – Lagranžovi množitelji.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.

Teorema 1 (neophodni uslovi uslovnog ekstremuma)
Neka su fje $f, F_1, F_2, \dots, F_m$ neprekidno diferencijabilne fje u nekoj okolini tačke $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ koje zadovoljavaju uslove (1). Ako fja f ima ekstremum u X^0 i ako u toj tački

$$\text{rang}\left[\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}\right] = m$$

to tada postoje brojevi $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$ takvi da važi

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial x_1} &= \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(X^0) = 0 \\
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial x_2} &= \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial F_i}{\partial x_2}(X^0) = 0 \\
&- - - - - - - - \\
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial x_n} &= \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(X^0) = 0 \\
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_1} &= F_1(X^0) = 0 \\
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_2} &= F_2(X^0) = 0 \\
&- - - - - \\
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_m} &= F_m(X^0) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

gdje je $\lambda^0 = (\lambda_1^0; \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ ▲

Tačka $(X^0, \lambda^0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ koja zadovoljava (4) se naziva stacionarnom tačkom fje L pri uslovima (1).
Da bi našli (X^0, λ^0) treba prvo formirati Lagranžovu fju (3), riješiti sistem (4) od $n+m$ jednačina s $n+m$ nepoznatih $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Teorema 2 (dovoljni uslovi ~~[illegible]~~ uslovnog ekstremuma)
Neka su f i F dvaput neprekidno diferencijabilne fje u okolini stacionarne tačke $(x_0, y_0; \lambda_0)$ Lagranžove fje $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda F(x,y)$.
Tada ako je
$$\begin{cases} d^2L(x_0, y_0; \lambda_0) < 0 \\ F(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} d^2L(x_0, y_0; \lambda_0) > 0 \\ F(x_0, y_0) = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$
to u tački (x_0, y_0) fja $u = f(x,y)$ ima lokalni uslovni maximum (minimum) pri uslovu $F(x,y) = 0$.

Primijetimo da dovoljni uslovi (5) fje f su jednaki sljedećem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{F'_x}{F'_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{F'_x}{F'_y} \end{pmatrix} < 0 \quad \text{uslovni maksimum} \quad (6')$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{F'_x}{F'_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{F'_x}{F'_y} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{uslovni minimum.} \quad (6'')$$

ovo slijedi iz toga što:

$$d^2L = (dx, dy) \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

i pritom je $F'_x dx + F'_y dy = 0$ iz uslova $\underline{F(x,y)=0}$.

odavde $dy = -\frac{F'_x}{F'_y} dx$. Uvrstimo ga u posljednju matričnu jedn. ⇒

$$d^2L = dx^2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{F'_x}{F'_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{F'_x}{F'_y} \end{pmatrix}$$

Pošto je $dx^2 > 0$ ⇒ ovo je isto kao uslov (6')

Naše uslove (6') i (6'') možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} F'_y & -F'_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_y \\ -F'_x \end{pmatrix} > 0 \quad (<0) \quad \text{minimum (maximum).}$$

Za tri nezavisne promjenljive dovoljni uslovi ekstremuma su

$\underline{u = f(x,y,z)}$ $\underline{F(x,y,z) = 0}$.

Dovoljni uslovi ekstremuma fje f u stacionarnoj tački $(x_0, y_0, z_0; \lambda_0)$ Lagranžove fje $L(x,y,z;\lambda) = f(x,y,z) + \lambda F(x,y,z)$ su

Ako je matrica

$$Q = \begin{pmatrix} -F'_z & 0 & F'_x \\ 0 & F'_z & F'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F'_z & 0 \\ 0 & -F'_z \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$$

pozitivno (negativno) definitna, to u tački (x_0, y_0, z_0) fja $u = f(x,y,z)$ ima lokalni uslovni minimum (maksimum).